

٦

الرياضيات

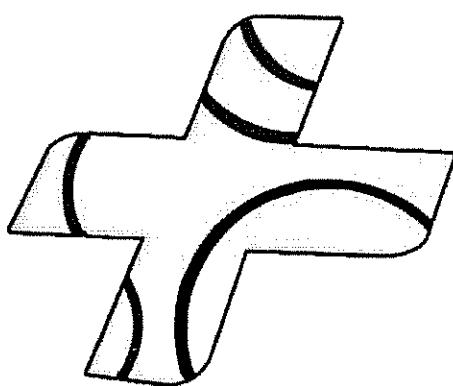
التحليل (٥)

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف الطليبي

٨



PLUS

LIBRARY



0944879460



011-2151436



البرامكة - حرم كلية الطورم



Plus Library

P L U S	المحاضرة : الثامنة	السنة: الثالثة	القسم: رياضيات	P L U S
	التاريخ: 2019 / 3 / 18	المادة: تحليل 5	الدكتور: نايف طلي	

في محاضرتنا لهذا اليوم سوف نكمل برهان معاير الدوال ذات التغير المحدود

تعريف شرط ليشتز (تمهيد لبرهان المعيار الثاني)

إذا كانت الدالة f معرفة على المجال $[a, b]$ نقول عن الدالة أنها تحقق شرط ليشتز من الدرجة k على $[a, b]$ إذا تحقق الشرط:

$$\exists L > 0 ; \forall u, v \in [a, b] : |f(u) - f(v)| \leq L \cdot |u - v|^k$$

نميز ثلاث حالات:

$$\exists L > 0 ; \forall u, v \in [a, b] : |f(u) - f(v)| \leq L \Leftrightarrow k = 0$$

$$\exists L > 0 ; \forall u, v \in [a, b] : |f(u) - f(v)| \leq L \cdot |u - v| \Leftrightarrow k = 1$$

$$\forall \alpha, \beta \in [a, b] \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] : f(x) = c \Leftrightarrow k > 1$$

العلاقة الأخيرة تفينا بأثبات أن $f(\alpha) = f(\beta)$ فالدالة ثابتة وتأخذ مني ثابت

(2) إذا كانت f دالة معرفة على $[a, b]$ وتحقق شرط ليشتز من الدرجة الأولى على $[a, b]$

فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$ ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

ملاحظة: إذا ذكرى شرط ليشتز فهذا يعني أننا في حالة $k = 1$ أما في الحالات الأخرى تذكر صراحة.

الفرض: f معرفة على $[a, b]$

تحقيق شرط ليشتز f

الطلب: f د.ت.م على $[a, b]$

الإثبات: لتكن P تجزئة من الشكل:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

حيث $P \in \mathbb{P}[a, b]$

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

دالة تحقق شرط ليشتز f

$$\forall x_k, x_{k-1} \in [a, b] : \exists L > 0 ; |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq L \cdot |x_k - x_{k-1}|$$

$$\Rightarrow V(f, P) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n L \cdot |x_k - x_{k-1}|$$

$$V(f, P) \leq L \cdot \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| = L \cdot (|x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + \dots + |x_n - x_{n-1}|)$$

$$V(f, P) \leq L \cdot (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1})$$

لأن $x_k - x_{k-1} \geq 0$ ومنه $x_k \geq x_{k-1}$

$$\Rightarrow V(f, P) = L \cdot (x_n - x_0) = L \cdot (b - a)$$

$$\Rightarrow \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} V(f, P) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L \cdot (b - a) = L \cdot (b - a)$$

$$\Rightarrow \underline{\lim}_{a \rightarrow b} f \leq L \cdot (b - a) < +\infty$$

ومنه f دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$.

العكس: أي إذا كانت f دلت. م ليس من الضروري أن تتحقق شرط ليشتزتر

لناخذ المثال:

f معرفة على $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\ln x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

الحل: (وظيفة)

نلاحظ أن f متزايدة لأن:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x(\ln x)^2} > 0 : x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

x	0	$\frac{1}{2}$
f'		+++
f	0	$\nearrow \frac{1}{u^2}$

بما أن متزايدة فهي دلت. م على $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

والتغير الكلي هو:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} f = & \left| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) \right| = \left| \frac{1}{\ln 2} - 0 \right| = \frac{1}{\ln 2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = & -\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{\ln 1 - \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} > 0 \end{aligned}$$

حيث f لا تحقق شرط ليبشتز

شرط ليبشتز:

فكرة الالبات: نحاول اختيار u معينة و v معينة بالنسبة لـ L لا نستطيع ايجاديهما
اما تحقق شرط ليبشتز مهما اخترنا u, v دائمًا نستطيع ايجاد L .

$$\exists L > 0 ; \forall u, v \in [a, b] : |f(u) - f(v)| \leq L \cdot |u - v|$$

لأخذ u, v مناسبين

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{|f(u) - f(0)|}{|u - 0|} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\ln u}}{u} = \dots * \\ &= - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{u}}{\ln u} = \text{حسب اوبيتا} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} = \infty \end{aligned}$$

أي لا يوجد L يتحقق

$$\frac{|f(u) - f(0)|}{|u - 0|} < L ; \forall u, v \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

ملاحظة: وضعنا اشاره $(-)$ في العلاقة * لأن $\ln u$ يكون سالب عندما u عندئذ

$-\frac{1}{u^2}$ يكون

تعريف دوال التغير الكلي للدالة f : تمديد لبرهان المعيار الثالث

ليكن لدينا f د.ت.م على $[a, b]$ ولتعرف الدالة $g(x)$ بالشكل:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; x = a \\ \frac{1}{2} \int_a^x f ; & a < x \leq b \end{cases}$$

ونسميهها دالة التغير الكلي للدالة f

نلاحظ على الدالة $g(x)$ ما يلي:

. $[a, b]$ دالة محدودة على $g(x)$ (1)

$$|g(x)| = \left| \underset{a}{\overset{x}{\vee}} f \right| = \underset{a}{\overset{x}{\vee}} f \leq \underset{a}{\overset{b}{\vee}} f < \infty$$

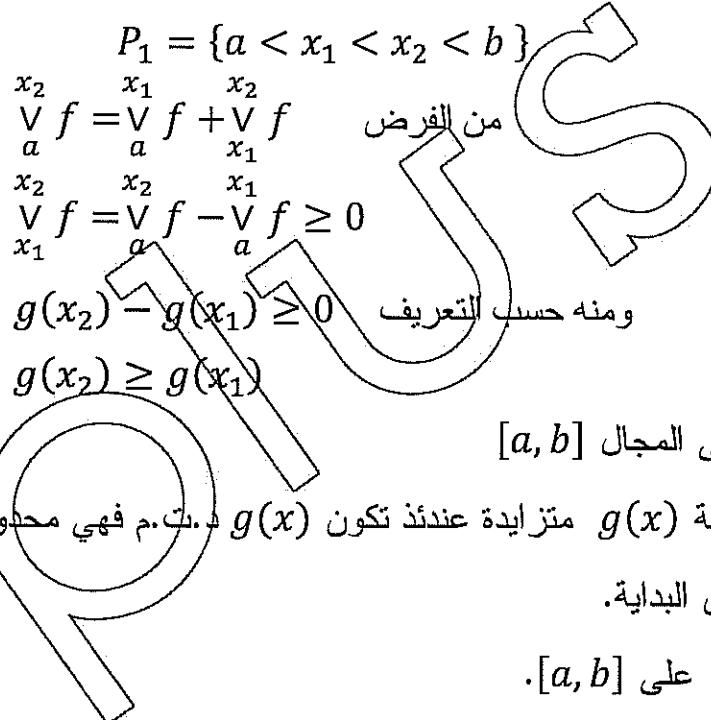
إذاً $g(x)$ دالة محدودة على $[a, b]$

. $[a, b]$ دالة متزايدة على $g(x)$ (2)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$$

الفرض: f د.ت.م على $[a, b]$

لأخذ التجزئة:



$\Leftarrow g(x)$ متزايدة على المجال $[a, b]$

ملاحظة: اثبتنا أن الدالة $g(x)$ متزايدة عندئذ تكون $g(x)$ د.ت.م فهي محدودة أي لا يوجد داعي لإثبات أنها محدودة من البداية.

. $[a, b]$ د.ت.م على $g(x)$ (3)

بما أنها متزايدة فهي د.ت.م

برهان المعيار: إذا كانت f دالة معرفة على $[a, b]$ فإن الشرط اللازم والكافي لتكون f دالة

ذات تغير محدود على $[a, b]$ هو أن تكتب على شكل فرق دالتين متزايدتين على $[a, b]$ أي:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) : \forall x \in [a, b]$$

حيث f_2 و f_1 متزايدتين على $[a, b]$.

البرهان:

\Leftarrow نختار $(x)g$ دالة التغير الكلي لـ f وهي متزايدة.

نبني الدالة:

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

إذا برهنا أن $h(x)$ متزايدة على $[a, b]$ فإننا نحصل على
لبرهن أن h متزايدة:
أي لنشت أن

$$x_1, x_2 \in [a, b]; x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) \leq h(x_2) \Rightarrow h(x_2) - h(x_1) \geq 0$$

$$\begin{aligned} h(x_2) - h(x_1) &= (g(x_2) - f(x_2)) - (g(x_1) - f(x_1)) \\ &= (g(x_2) - g(x_1)) - (f(x_2) - f(x_1)) \end{aligned}$$

أي يجب أن ثبّر أن

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &\leq g(x_2) - g(x_1) \\ (f(x_2) - f(x_1)) &\leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} f^2 dx} = \sqrt{\int_a^{x_2} f^2 dx} - \sqrt{\int_a^{x_1} f^2 dx} = g(x_2) - g(x_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x_2) - g(x_1) \geq (f(x_2) - f(x_1))$$

$$\Rightarrow h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - g(x_1) - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0$$

$$\Rightarrow h(x_2) \geq h(x_1)$$

ومنه h متزايدة على $[a, b]$ ويكون:

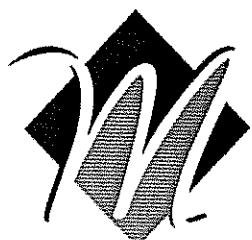
$$h(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow f(x) = g(x) - h(x)$$

f هي فرق دالتين متزايدتين $\Leftarrow f$ د.ت.م.

\Rightarrow f_1 دالة متزايدة فهي د.ت.م على المجال $[a, b]$

2... $[a, b]$ دالة متزايدة فهي د.ت.م على المجال $[a, b]$

$f_1 - f_2$ وفرق دالتين كل منهما د.ت.م على $[a, b]$ وبالتالي f د.ت.م على المجال $[a, b]$



Math Mad Team

جامعة الملك عبد الله للعلوم
التطبيقية

إعداد: عبد الرحمن خالد الجامع، سمير الحاج علي.