الرياضيات

6

التحليل (5)

8

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف الطلي

PLUS LIBRARY

في محاضرتنا لهذا اليوم سوف نكمل برهان معايير الدوال ذات التغيير المحدود

تعريف شرط ليبشتز (تمهيد لبرهان المعيار الثاني)

اذا كانت الدالة f معرفة علة المجال $[a,b]$ نقول عن الدالة أتها تحقق شرط ليبشتز من الدرجة k على $[a,b]$ اذا تحقق الشرط:

$$\exists\, L > 0\,;\ \forall u,v\ \in [a,b]\ :\ |f(u)-f(v)| \le L\cdot|u-v|^k$$

نميز ثلاث حالات:

$k=0 \Leftrightarrow \exists\, L>0\,;\ \forall u,v \in [a,b]\ :\ |f(u)-f(v)|\le L \Leftrightarrow f$ محدودة

$k=1 \Leftrightarrow \exists\, L>0\,;\ \forall u,v \in [a,b]\ :\ |f(u)-f(v)|\le L\cdot|u-v|$

$k>1 \Leftrightarrow f$ دالة ثابتة $\Leftrightarrow \forall x\in[a,b]; f(x)=c \Leftrightarrow \forall \alpha,\beta\in[a,b] \Rightarrow f(\alpha)=f(\beta)$

العلاقة الأخيرة تفيدنا بأثبات أن $f(\alpha)=f(\beta)$ فالدالة ثابتة وتأخذ منحى ثابت

---

2) إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز من الدرجة الأولى على $[a,b]$ فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

ملاحظة: اذا ذكرى شرط ليبشتز فهذا يعني أننا في حالة $k=1$ أما في الحالات الأخرى تذكر صراحة.

الفرض: f معرفة على $[a,b]$

f تحقق شرط ليبشتز

الطلب: f د.ت.م على $[a,b]$

الإثبات: لتكن P تجزئة من الشكل:

$$P=\{a=x_0<x_1<x_2< \ \dots .< x_n=b\}$$

حيث $P\in\mathbb{P}[a,b]$

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

f دالة تحقق شرط ليبشتز

$$\forall x_k, x_{k-1} \in [a,b] : \exists\, L > 0 ; |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le L \cdot |x_k - x_{k-1}|$$

$$\Rightarrow V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} L \cdot |x_k - x_{k-1}|$$

$$V(f,P) \le L \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| = L\,.(|x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|)$$

$$V(f,P) \le L\,.(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1})$$

لأن $x_k \ge x_{k-1}$ ومنه $x_k - x_{k-1} \ge 0$

$$\Longrightarrow V(f,P) = L\,.(x_n - x_0) = L \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow \sup_{p \in P[a,b]} V(f,P) \le \sup_{p \in P[a,b]} L \cdot (b-a) = L \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f \le L \cdot (b-a) < +\infty$$

ومنه f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.

العكس: أي اذا كانت f د.ت.م ليس من الضروري أن تحقق شرط ليبشتز

لنأخذ المثال:

f معرفة على $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ كما يلي:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\ln x} & ; x \ne 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}}$$

الحل: (وظيفة)

نلاحظ أن f متزايدة لأن:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x(\ln x)^2} > 0 \ : x \in]0, \frac{1}{2}[$$

x	0	$\frac{1}{2}$
f'	+++	
f	0 ↗	$\frac{1}{u^2}$

بما أن متزايدة فهي د.ت.م على $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

والتغير الكلي هو:

$$\overset{\frac{1}{2}}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f = \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right| = \left|\frac{1}{\ln 2} - 0\right| = \frac{1}{\ln 2}$$

بحيث $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{\ln 1 - \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} > 0$

f لا تحقق شرط ليبشتز

شرط ليبشتز:

فكرة الاثبات: نحاول اختيار u معينة و v معينة بالنسبة لـــ L لا نستطيع ايجاديها

أما تحقق شرط ليبشتز مهما اخترنا u, v دائما نستطيع ايجاد L.

$$\exists L > 0 ;\ \forall u, v \in [a, b] : |f(u) - f(v)| \le L \cdot |u - v|$$

لنأخذ u, v مناسبين $v = 0\ , u \overset{>}{\longrightarrow} 0$

$$\lim_{u \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{|f(u) - f(0)|}{|u - 0|} = \lim_{u \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{-\frac{1}{\ln u}}{u} = \cdots *$$

$$= -\lim_{u \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{\frac{1}{u}}{\ln u} \underset{\text{حسب أوبيتال}}{=} -\lim_{u \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{-\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u}}$$

$$= \lim_{u \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{1}{u} = \infty$$

أي لا يوجد L يحقق

$$\frac{|f(u) - f(0)|}{|u - 0|} < L\ ;\ \forall u.v \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

ملاحظة: وضعنا اشارة $(-)$ لـــ $-\frac{1}{u^2}$ في العلاقة * لان $\ln u$ يكون سالب عندما $u \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ عندئذ يكون $-\frac{1}{u^2}$

تعريف دوال التغير الكلي للدالة f: تمهيد لبرهان المعيار الثالث

ليكن لدينا f د.ت.م على $[a, b]$ ولتعرف الدالة $g(x)$ بالشكل:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; x = a \\ \underset{a}{\overset{x}{\mathrm{V}}} f & ; a < x \le b \end{cases}$$

ونسميها دالة التغير الكلي للدالة f

نلاحظ على الدالة $g(x)$ ما يلي:

1) $g(x)$ دالة محدودة على $[a,b]$.

$$|g(x)| = \left|\overset{x}{\underset{a}{\vee}} f\right| = \overset{x}{\underset{a}{\vee}} f \le \overset{b}{\underset{a}{\vee}} f < \infty$$

اذاً $g(x)$ دالة محدودة هلى $[a,b]$ $\forall x \in$

2) $g(x)$ دالة متزايدة على $[a,b]$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \le g(x_2)$$

الفرض: f د.ت.م على $[a,b]$

لنأخذ التجزئة:

$$P_1 = \{a < x_1 < x_2 < b\}$$

$$\overset{x_2}{\underset{a}{\vee}} f = \overset{x_1}{\underset{a}{\vee}} f + \overset{x_2}{\underset{x_1}{\vee}} f \quad \text{من الفرض}$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\vee}} f = \overset{x_2}{\underset{a}{\vee}} f - \overset{x_1}{\underset{a}{\vee}} f \ge 0$$

$$g(x_2) - g(x_1) \ge 0 \quad \text{ومنه حسب التعريف}$$

$$g(x_2) \ge g(x_1)$$

$\Leftarrow$ $g(x)$ متزايدة على المجال $[a,b]$

ملاحظة: اثبتنا أن الدالة $g(x)$ متزايدة عندئذ تكون $g(x)$ د.ت.م فهي محدودة أي لا يوجد داعي لإثبات أنها محدودة من البداية.

3) $g(x)$ د.ت.م على $[a,b]$.

بما أنها متزايدة فهي د.ت.م

برهان المعيار: إذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ فإن الشرط اللازم والكافي لتكون f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ هو أن تكتب على شكل فرق دالتين متزايدتين على $[a,b]$ أي:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad : \forall\, x \in [a,b]$$

حيث f_2 و f_1 متزايدتين على $[a,b]$.

البرهان:

$\Leftarrow$) نختار $g(x)$ دالة التغير الكلي لـــ f وهي متزايدة.

نبني الدالة:

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

فإذا برهنا أن $h(x)$ متزايدة على $[a, b]$ فإننا نحصل على $f(x) = g(x) - h(x)$

لنبرهن أن h متزايدة:

أي لنثبت أن

$$x_1, x_2 \in [a, b]; x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) \le h(x_2) \Rightarrow h(x_2) - h(x_1) \ge 0$$

$$h(x_2) - h(x_1) = \big(g(x_2) - f(x_2)\big) - \big(g(x_1) - f(x_1)\big)$$

$$= \big(g(x_2) - g(x_1)\big) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big)$$

أي يجب أن نبرهن أن

$$f(x_2) - f(x_1) \le g(x_2) - g(x_1)$$

$$\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \le |f(x_2) - f(x_1)| \le \bigvee_{x_1}^{x_2} f = \bigvee_{a}^{x_2} f - \bigvee_{a}^{x_1} f = g(x_2) - g(x_1)$$

$$\Rightarrow g(x_2) - g(x_1) \ge \big(f(x_2) - f(x_1)\big)$$

$$\Rightarrow h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - g(x_1) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big) \ge 0$$

$$\Rightarrow h(x_2) \ge h(x_1)$$

ومنه h متزايدة على $[a, b]$ ويكون:

$$h(x) = g(x) - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) - h(x)$$

f هي فرق دالتين متزايدتين $\Leftarrow$ f د.ت.م.

$\Rightarrow$) f_1 دالة متزايدة فهي د.ت.م على المجال $[a, b]$ ...1

f_2 دالة متزايدة فهي د.ت.م على المجال $[a, b]$...2

$f_1 - f_2$ وفرق دالتين كل منهما د.ت.م على $[a, b]$ بالتالي f د.ت.م على المجال $[a, b]$

انتهت المحاضرة

Math Mad Team

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.